Инженерный вестник Дона, №6 (2025)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2025/10131

Нахождение равновесия по Штакельбергу в модели управления развитием районов дотационного региона. Влияние создания коалиций.

А.П. Этеев

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Аннотация: В статье исследуется сетевая модель управления районами в составе дотационного региона с точки зрения верхнего уровня с учетом оптимальной реакции районов – находится равновесие по Штакельбергу. Проводится сравнение полученных результатов с соответствующими результатами при создании горизонтальных и комплексной коалиций районов и региона. Исследуется предпочтительность создания коалиций для всех участников системы. Доказано, что слабым и средним районам выгодна кооперация, сильному району выгодна иерархия, региону, как верхнему уровню, выгодна независимость. Сильным элементам системы невыгодно вступать в коалицию, слабым элементам выгодно объединяться в коалицию.
Ключевые слова: сетевая модель, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, распределение ресурсов, метод множителей Лагранжа, кооперация, горизонтальная коалиция, максимальная коалиция, комплексная коалиция, независимое поведение.

Введение

В статье решается задача распределения дотационным регионом субсидий между включенными в него районами. В [1] построена сетевая модель управления районами в составе дотационного региона и найдена оптимальная стратегия ее агентов нижнего уровня – районов – на стратегию верхнего уровня. В этой статье находится равновесие по Штакельбергу.

Также в статье исследуется, как создание коалиций влияет на распределении субсидии, выделенной государством региону, между районами. Среди рассматриваемых коалиций выделены горизонтальная коалиция, объединяющая все районы региона, а также максимальная коалиция, объединяющая регион и все районы.

Кроме того, в статье исследуется предпочтительность для субъектов системы таких регламентов управления, как независимость всех участников системы, объединение в горизонтальную или вертикальную коалиции. Среди субъектов выделяются такие, как сильный район, слабый район, средний район, коалиция слабых районов, коалиция сильных районов, коалиция слабого, сильного и среднего района, коалиция всех районов, коалиция региона и одного района, коалиция региона и всех районов.

Обзор литературы

Односекторная модель экономики региона описана Р. Солоу в [2]. В качестве ресурсов для производства выступают основные фонды региона и трудовое население. Часть дохода от выпуска конечного продукта производства идет на пополнение основных фондов, оставшаяся часть дохода идет на потребление населения. Требуется найти такую доли от выпуска конечного продукта, которая пойдет на пополнение основных фондов, при которой удельное потребление на весь период прогнозирования максимально.

В [3,4] над моделью Рамсея-Солоу введена надстройка в виде верхнего уровня – макрорегиона, объединяющего несколько регионов, учтена экологическая составляющая. Кроме того, в [4] были введены коэффициенты взаимосвязи региона с другими регионами. В [5,6,7] были рассмотрены некоторые другие модели регионального управления, учитывающие различные аспекты, в том числе и модели дотационного региона [8], а также кооперативные модели территориального развития [9].

В [1] модель, рассматриваемая в [4] была модифицирована для районов региона, причем субсидированного государством. В таких регионах промышленность развита мало, поэтому промышленные выбросы незначительны и ими можно пренебречь. По этой причине модель в [4] не учитывает экологические параметры. Кроме того, вводятся зависимости коэффициентов рождаемости и смертности от потребления, а также коэффициента взаимодействия районов – от расстояния между ними.

Модель, предложенная в [1], исследована на устойчивость по каждому из динамически изменяемых параметров в отдельности и по их совокупности. Найдена реакция нижнего уровня (районов) в виде доли инвестиций в производство. В случае отсутствия субсидий на инвестиции идет более 90% от конечного продукта района, а в случае наличия субсидий, доля инвестиций безразлична.

Математическая модель

Рассматриваемая математическая модель управления развитием районов дотационного региона описана и построена в [1] и имеет вид:

$$Y_i(t) = A_i(t)K_i^{\alpha_i}(t)(R_i(t)L_i(t))^{1-\alpha_i} \quad (1)$$

$$I_i(t) = s_i(t)Y_i(t) \quad (2)$$

$$C_i(t) = [1 - s_i(t)]Y_i(t) \quad (3)$$

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = \eta_i R_i(t) \quad (4)$$

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = -\mu_i K_i(t) + \sum_{j=1}^{n} k_{ji}(t, d_{ij}) I_j(t) + Sub_i(t) \quad (5)$$

$$\frac{dL_i(t)}{dt} = (b_i(C_i) - m_i(C_i))L_i(t); \quad (6)$$

$$K_i(0) = K_i^0; \quad L_i(0) = L_i^0; \quad R_i(0) = R_i^0; \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \kappa_{ij}(t, d_{ij}) = 1;$$

$$0 \le s_i(t) \le 1; \;\; \kappa_{ij} \ge 0; \quad (8)$$

где индекс i обозначает район в составе региона. Время t = 0, 1, 2, … в модели изменяется с шагом в один год, $Y_i(t)$ – конечный продукт района в финансовом выражении в году t; $K_i(t)$ – основные производственные фонды района в году t; $L_i(t)$ – трудовые ресурсы района в году t; $R_i(t)$ – эффективность трудовых ресурсов района в году t; $A_i(t)$ – функция влияния инновационной активности района на производство конечного продукта в году t; α_i- параметр производственной функции Кобба-Дугласа для района; $I_i(t)$ – величина производственных инвестиций района в году t; $C_i(t)$ – объем непроизводственного потребления района в году t; $s_i(t)$ – доля производственных инвестиций района в его конечном продукте в году t; η_i - параметр роста эффективности трудовых ресурсов района; μ_i- коэффициент амортизации основных фондов района; $\kappa_{ij}(t, d_{ij})$ - доля инвестиций i-го района в деятельность j-го района (коэффициент взаимодействия между агентами); $b_i(C_i)$, $m_i(C_i)$ - коэффициенты воспроизводства и выбытия трудовых ресурсов для района; K_i^0, L_i^0, R_i^0 - заданные начальные значения соответствующих переменных модели; $Sub(t)$ – субсидии региону со стороны государства.

Целевая функция района с учетом дисконтирования во времени:

$$\bar{J}_i = \sum_{t=1}^{T} e^{-\rho t} Y_i(t) \to max \tag{9}$$

Целевая функция всего региона:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J_i. \tag{10}$$

при ограничении на распределение бюджета между районами:

$$\sum_{i=1}^{n} Sub_i(t) = Sub(t),\ t = 0, 1, 2, \dots, T\text{-}1. \tag{11}$$

где a_i - вес района в целевой функции региона. Считаем, что вес каждого района пропорционален его населению, т.е. $\alpha_i = \frac{L_{io}}{\sum_{i=1}^{n} L_{io}}$.

В этой статье также рассматривается коалиционное взаимодействие участников системы. Рассмотрим два вида коалиций: горизонтальную и комплексную. Горизонтальная коалиция объединяет субъекты одного уровня, в данном случае это районы. Комплексная коалиция объединяет центр и несколько агентов, в данном случае это весь регион и несколько районов.

В случае создания коалиции ее целевая функция определяется как сумма целевых функций ее участников [10].

Тогда в случае коалиции всех районов (назовем эту коалицию K):

$$J_K = \sum_{i=1}^{n} J_i \to max \tag{12}$$

а в случае максимальной коалиции

$$J_N = J + \sum_{i=1}^{n} J_i \rightarrow max \tag{13}$$

Выражения (1) – (11) и составляют математическую модель управления развитием районов дотационного региона, выражения (2) – (8), (10) – (12) составляют теоретико-игровую задачу региона и горизонтальной коалиции, а выражения (2) – (8), (10), (11), (13) составляют задачу максимальной коалиции.

Равновесие по Штакельбергу в игре в нормальной форме

Решим задачу региона, который руководит районами - задачу максимизация его целевой функцией региона

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} L_{i0}} J_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_{i0} J_i}{\sum_{i=1}^{n} L_{i0}} \rightarrow max$$

В каждый момент времени регион получает субсидию $Sub(t)$, которую распределяет между районами в неотрицательных количествах $Sub_i(t)$.

Несмотря на то, что модель динамическая, методы исследования динамических моделей в данном случае не требуются, так как выделенные субсидии распределяются между районами сразу и полностью после получения регионом. А районы полученные субсидии сразу пускают на целевые расходы. Субсидии не накапливаются и не переходят на использование в другие моменты времени. Субсидии не имеют динамической структуры во времени. В связи с этим задача распределения субсидий решается в каждый момент времени независимо от других моментов времени. То есть, задача распределения субсидий на заданном отрезке времени длиной Т сводится к Т статическим задачам распределения субсидий на каждом шаге времени.

Решим эту задачу. Для начала сформируем целевую функцию региона. Разделим районы на два множества: районы, получающие субсидии, и районы, не получающие субсидии. Обозначим $I(t) = \{i: sub_i(t) > 0\}$ множество районов, получающих субсидии в момент времени *t*.

Тогда целевая функция региона примет вид:

$$J = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} L_{i0}} \sum_{t=1}^{T} e^{-\rho t} A_i(t) \left(\sum_{i \notin I} L_{i0}((1-\mu_i)K_i^{t-1} + (1-\varepsilon)Y_i^{t-1})^{\alpha_i} \times \right.$$

$$\times \left((1+\eta)R_i^{t-1}\left(1 + b_i\left(\varepsilon Y_i^{t-1}\right) - m_i(\varepsilon Y_i^{t-1})\right)\right)L_i^{t-1})^{1-\alpha_i} +$$

$$\left. + \sum_{i \in I} L_{i0}((1-\mu_i)K_i^{t-1} + Sub_i^{t-1})^{\alpha_i} \left((1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)\right) L_i^{t-1})^{1-\alpha_i} \right)$$

которая стремится к максимуму.

Данная задача является задачей нелинейного программирования. Для ее решения составим функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{i \in I} L_{i0}((1-\mu_i)K_i^{t-1} + Sub_i(t))^{\alpha_i} \left((1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)\right) L_i^{t-1})^{1-\alpha_i} +$$

$$+\lambda \left(\sum_{i \in I} Sub_i(t) - Sub(t) \right)$$

Решив эту задачу, получим

$$\lambda = -\left(\frac{\sum_{i \in I} \sqrt[1-\alpha_i]{L_{i0}\alpha_i}(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}}{Sub(t) + \sum_{i \in I}(1-\mu_i)K_i^{t-1}} \right)^{1-\alpha_i}$$

Подставим полученное выражение в (13), получим:

$$Sub_i(t) = \frac{\sqrt[1-\alpha_i]{L_{i0}\alpha_i}(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}\left(Sub(t) + \sum_{i \in I}(1-\mu_i)K_i^{t-1}\right)}{\sum_{i \in I} \sqrt[1-\alpha_i]{L_{i0}\alpha_i}(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}} - (1-\mu_i)K_i^{t-1}. \tag{14}$$

Найден оптимальный размер субсидий для районов.

Но дело в том, что размер субсидий, вычисленный по данной формуле, может оказаться отрицательным. В этом случае алгоритм использования формулы (14) следующий.

1. Во множество субсидируемых районов I включим все районы.
2. Проведем процедуру определения оптимального размера субсидий каждого района по формуле (14).
3. Если нет районов, для которых величина субсидий оказалась отрицательной, конец алгоритма. Если же есть такие районы, то все районы, для которых величина субсидий оказалась отрицательной, включим во множество несубсидируемых районов (назначив $Sub_i(t) = 0$). Перейти к шагу 2.

Шаги 2 и 3 выполняем до тех пор, пока во множестве I не останется ни одного района, для которого размер субсидии, вычисленный по формуле (14), будет отрицательным.

Такой момент наступит, так как число районов конечное. В итоге либо все районы окажутся включенными во множество несубсидируемых районов, либо останутся некоторые районы, для которых величины субсидий, вычисленных по (14), будут оставаться положительными.

Равновесие по Нэшу при горизонтальной коалиции районов

Теперь рассмотрим коалиционное взаимодействие участников системы.

Рассмотрим два случая коалиционного взаимодействия между районами: горизонтальная коалиция, включающая в себя все районы, и комплексная максимальная коалиция, включающая в себя регион и все его районы. Найдем распределение субсидий между районами, которое выгодно коалиции всех районов.

Разделим районы на два множества: районы, получающие субсидии, и районы, не получающие субсидии. Обозначим

$I(t) = \{i: sub_i(t) > 0\}$ множество районов, получающих субсидии в момент времени *t*.

Решая данную задачу аналогично предыдущей, получим:

$$Sub_i(t) = \frac{\sqrt[1-\alpha_i]{\alpha_i}(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}\left(Sub(t)+\sum_{i\in I}(1-\mu_i)K_i^{t-1}\right)}{\sum_{i\in I}\sqrt[1-\alpha_i]{\alpha_i}(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}} - (1-\mu_i)K_i^{t-1}.$$

Найден оптимальный размер субсидий для районов в случае объединения районов в коалицию.

На случай защиты от возможных отрицательных значений распределения субсидий можно воспользоваться алгоритмом, аналогичным алгоритму, описанному в предыдущем пункте.

Парето-оптимальное решение при максимальной коалиции

Рассмотрим комплексную максимальную коалицию рассматриваемой системы, включающую в себя регион и все его районы. Найдем распределение субсидий между районами, которое выгодно коалиции всех районов.

Разделим районы на два множества: районы, получающие субсидии, и районы, не получающие субсидии. Обозначим $I(t) = \{i: sub_i(t) > 0\}$ множество районов, получающих субсидии в момент времени *t*.

Тогда целевая функция коалиции N:

$$J_N = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} L_{i0}} \sum_{t=1}^{T} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\left((1-\mu_i)K_i^{t-1} + s_i^t Y_i^{t-1} + Sub_i^{t-1}\right)^{\alpha_i} \times$$

$$\times \left((1+\eta)R_i^{t-1}\left(1 + b_i\left((1-s_i^t)Y_i^{t-1}\right) - m_i((1-s_i^t)Y_i^{t-1}\right)\right) L_i^{t-1})^{1-\alpha_i} \times$$

$$\times \left(L_{i0} + \sum_{i=1}^{n} L_{i0}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} L_{i0}} \sum_{t=1}^{T} e^{-\rho t} A_i(t) \times$$

$$\times\left(\sum_{i\notin I}((1-\mu_i)K_i^{t-1}+(1-\varepsilon)Y_i^{t-1})^{\alpha_i}\times\right.$$

$$\times\left((1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i(\varepsilon Y_i^{t-1})-m_i(\varepsilon Y_i^{t-1}))\right)L_i^{t-1})^{1-\alpha_i}\left(L_{i0}+\sum_{i=1}^{n}L_{i0}\right)+$$

$$+\sum_{i\in I}((1-\mu_i)K_i^{t-1}+Sub_i^{t-1})^{\alpha_i}\left((1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)\right)L_i^{t-1})^{1-\alpha_i}\Big)\times$$

$$\times\left(L_{i0}+\sum_{i=1}^{n}L_{i0}\right)$$

Решая полученную задачу методом множителей Лагранжа, получим:

$$Sub_i(t)=\frac{\sqrt[1-\alpha_i]{\alpha_i}(L_{i0}+\sum_{i=1}^{n}L_{i0})(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}}{\sum_{i\in I}\sqrt[1-\alpha_i]{\alpha_i\left(L_{i0}+\sum_{i=1}^{n}L_{i0}\right)(1+\eta)R_i^{t-1}(1+b_i-m_i)L_i^{t-1}}}\times$$

$$\times\left(Sub(t)+\sum_{i\in I}(1-\mu_i)K_i^{t-1}\right)-(1-\mu_i)K_i^{t-1}$$

Найден оптимальный размер субсидий для районов в случае объединения районов и региона в коалицию.

Заключение

В статье решена задача распределения дотационным регионом субсидий между включенными в него районами. Исследовано влияние коалиций на распределение субсидий, выделенных государством региону, между районами. Найдены предпочтительные регламенты для всех возможных субъектов системы, среди которых выделяются сильный район, слабый район, средний район, коалиция слабых районов, коалиция сильных районов, коалиция слабого, сильного и среднего района, коалиция всех районов, коалиция региона и одного района, коалиция региона и всех районов.

Литература

1. Горбанева О.И., Этеев, А.П. Модификация региональной модели Солоу для управления развитием районов дотационного региона на примере Республики Калмыкия // Инженерный вестник Дона, 2025, №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_76N12y24_gorbaneva_eteev.pdf_973e7002c3.pdf.

2. Solow R. M. Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. 1957. 39(3). pp. 312—320.

3. Gorbaneva, O.I., Murzin, A.D., Ougolnitsky, G.A. Public-Private Partnership in Regional Development as a Tool of Sustainable Management // Journal of Sustainability Research. 2024. №6(3). p. 240049.

4. Anopchenko T., Gorbaneva O., Lazareva E., Murzin A., Ougolnitsky G. Modeling Public-Private Partnerships in Innovative Economy: A Regional Aspect // Sustainability. 2019. №11(20). С. 5588.

5. Шегельман, И.Р., Рудаков, М.Н. О приложении ресурсной теории к оценке конкурентных преимуществ региона в области рационального природопользования // Инженерный вестник Дона, 2014, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2232.

6. Аджиев А.А., Нови И. Н. Моделирование и управление пространственным развитием регионов: методологические подходы и инструменты // Научный аспект, т.5, №6, 2024, с. 542-548.

7. Шимановский Д.В. Инновации как фактор экономического роста регионов России: эконометрический анализ // Вестник Пермского университета. Серия: экономика. 2022. №17(2). С. 145-160.

8. Лапаев Д. Н., Михайлов А. В. Стратегическое управление социально-экономическим развитием дотационного региона // Управление экономическими системами»: электронный научный журнал, № 10 (46), 2012, с. 1-14.

9. Горелова И.С. Теоретико-игровое моделирование адаптации территориальных мощностей к рыночным социально-экономическим условиям // Инженерный вестник Дона, 2008, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/ n3y2008/93.

10. Печерский С. Л., Яновская Е. Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы // Изд-во Европейского ун-та в С.-Петербурге, 2004, 459 с.

References

1. Gorbaneva O.I., Jeteev, A.P. Inzhenernyj vestnik Dona, 2025, №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_76N12y24_gorbaneva_eteev.pdf_973e7002c3.pdf

2. Solow R. M. Technical The Review of Economics and Statistics. 1957. 39(3). P. 312—320.

3. Gorbaneva, O.I., Murzin, A.D., Ougolnitsky, G.A. Journal of Sustainability Research. 2024. №6(3). p. 240049.

4. Anopchenko T., Gorbaneva O., Lazareva E., Murzin A., Ougolnitsky G. Sustainability. 2019. №11(20). p. 5588.

5. Shegel'man, I.R., Rudakov, M.N. Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2232.

6. Adzhiev A.A., Novi I. N. Nauchnyj aspekt, t.5, №6, 2024, p. 542-548.

7. Shimanovskiy D.V. Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: ekonomika. 2022. №17 (2). p. 145-160.

8. Lapaev D. N., Mihajlov A. V. Upravlenie jekonomicheskimi sistemami»: jelektronnyj nauchnyj zhurnal, № 10 (46), 2012, pp. 1-14.

9. Gorelova I.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2011, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/464.

10. Pecherskij S. L., Janovskaja E. B. Kooperativnye igry: reshenija i aksiomy [Cooperative games: solutions and axioms]. Izd-vo Evropejskogo un-ta v S.-Peterburge, 2004, 459 p.

Дата поступления: 12.04.25 Дата публикации: 25.05.2025