

## Методика численного расчета водного потока на многоузловых участках рек

*С.В.Моторин<sup>1,2</sup>, А.В.Ботвинков<sup>1</sup>, Д.Н.Голышев<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск*

**Аннотация:** Приведена методика численного расчета параметров русла реки в рукавах. Используется метод нелинейного программирования для анализа диссипативных систем с сосредоточенными параметрами. Методика ориентирована на компьютерное моделирование в среде инженерного пакета MathCad. Приведены результаты эксперимента.

**Ключевые слова:** распределение водного потока, методика расчета, многоузловые участки рек, расход воды.

**Введение.** Улучшение судоходных условий на реках тесно связано с повышением эффективности проведения и проектирования путевых работ на внутренних водных путях. Крайне важно обоснованное принятие решения о распределении расходов воды по рукавам русла и способов их регулирования [1,2]. Анализ ситуации осложняется сложностью и трудоемкостью проведения мер по измерению параметров русла: уровня падения и расхода воды в рукавах. Необходимо обоснование намечаемых мероприятий по проведению дноуглубительных работ и их оптимизация определяющим фактором для обеспечения безопасности как судоходства, так и гидротехнических сооружений и объектов, располагающихся в русле [3,4]. Анализ известных методов расчета многоузловых участков рек, как правило, дают неоднозначное и даже неверное физическое решение при расчетах, так как базируются на основе решения систем нелинейных уравнений [5,6].

**Исходные положения.** Предложенный ранее нами метод [6,7] расчета распределения потоков по рукавам русла реки при наличии количественных характеристик системы: модуля сопротивления  $f_i$   $i$ -того участка рукава русла и известного (входного потока) расхода во входном створе  $Q_{in}$ . Метод основан на принципе Максвелла [6]. Известно, что в чисто диссипативной

системе полная мощность потерь, распределение потоков, равна сумме потерь во всех ее элементах системы:

$$\left. \begin{aligned} W(Q) &= \sum_{i=1}^M q_i^2 \cdot |q_i| \cdot f_i \rightarrow \frac{\min}{Q \subset \Omega} \\ \Omega: \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_{in} \\ |Q| &\leq \sum_{i=1}^M |q_{in_i}| \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $q_i$  - рассчитываемый, неизвестный, расход на  $i$ -том участке рукава русла,  $\mathbf{A}$  – матрица соединений графа,  $\mathbf{Q}(q_i)$  - вектор неизвестных расходов в рукавах русла.

Для проверки найденного решения используется матричное выражение:

$$\mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{Z} = 0, \quad (2)$$

и ограничение из (1). Здесь:  $\mathbf{C}$  - матрица независимых контуров,  $\Delta \mathbf{Z}$  - вектор падений уровней воды в рукавах русла в соединении ( $\Delta z = q \cdot |q| \cdot f$  - компоненты этого вектора [6]). При заданном векторе модулей сопротивлений рукавов русла  $f$  уравнения (1) и (2) полностью определяют задачу расчета расходов и падений уровней на многоузловых участках реки.

**Методика расчета.** Использование матрицы, описывающей топологию русла реки, особенно эффективно для расчета многосвязанных участков рек (рис.1).

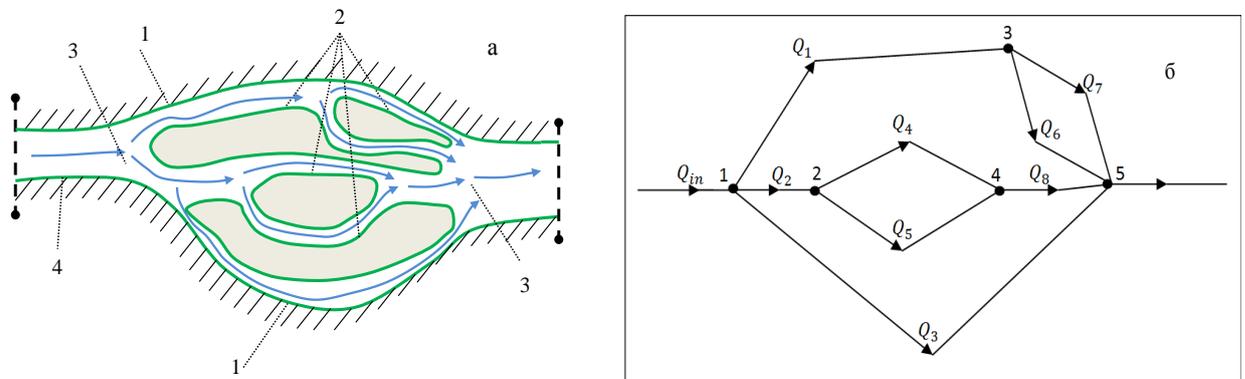


Рис. 1 – а) пример участка русла реки и б) его топология

1 - берега; 2 – острова; 3 – русло реки; 4 – направление течения;

Топология участка реки на основании русла реки и направления течений в его рукавах (рис.1а) представлена на рис.1б. Для практических целей крайне удобно проводить расчеты в широко распространенном инженерном пакете MathCad [8], не используя для решения уравнений Кирхгофа [9] специализированные пакеты типа MicroCap. Рассмотрим методику расчета.

Для топологии рис.1б составим матрицу  $\mathbf{A}$ , описывающую граф размерностью  $[N \times M]$ :

$\mathbf{A} :=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	-1	0	1	1	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	-1	-1	0
4	0	0	0	-1	-1	0	0	1
5	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1

где:  $N$  – число строк (узлов, слияний рукавов), количество независимых уравнений, образованных слиянием потоком воды в узле;  $M$  – число столбцов (рукавов), количество неизвестных расходов воды  $q_i$ .

В матрице  $\mathbf{A}$ , на пересечении в  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца записываем  $-1$ , если направление движения потока к соединению рукавов, и  $+1$ , если поток направлен от соединения. Все остальные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  равны нулю.

Дальнейший расчет очень эффективно для практических целей проводить в инженерном пакете MathCad. Итак, имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} Q_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{AB}$ - расширенная матрица соединений.

Тогда  $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

$\text{ранг}(\mathbf{A}) = 5$  и  $\text{ранг}(\mathbf{AB}) = 5$  равны, следовательно, система разрешима.

Зададимся условными значениями модулей сопротивлений участков  $\mathbf{f}^T = [4 \ 1 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4 \ 4 \ 2]$  и начальным значением расходов в рукавах  $\mathbf{q}^T = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$ .

Так как  $w_i = q_i^2 \cdot |q_i| \cdot f_i$  выпуклая, четная и неотрицательная функция, то для расчета  $W(Q)$  имеем выражение  $W(Q) = \sum_{i=1}^8 |q_i|^3 \cdot f_i$  - функция поиска минимума ( $M = 8$ ).

Далее воспользуемся встроенной в MathCad функцией приближенных вычислений *Given* и функцией *Minimize* (режим нелинейный, соединенный градиент) [9]. Имеем:

$$\begin{aligned}
 &M := 8 \quad i := 1 \dots M \\
 &q_i := 0.1 \\
 &W(q) = \sum_{i=1}^M |q_i|^3 \cdot f_i \\
 &\text{Given} \\
 &\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \quad \text{откуда, имеем } \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.4 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}. \quad (2) \\
 &-Q_{in} \leq q \leq Q_{in} \\
 &q_i = \text{Minimize}(W, q) \\
 &q_i = 0.77 \\
 &\Delta z = \overline{(q_i \cdot |q_i| \cdot f)}
 \end{aligned}$$

В результате получим следующие значения для расходов и падения воды:

$$\mathbf{q}_i^T = [-0.5 \ -0.259 \ -0.241 \ -0.152 \ -0.107 \ 0.25 \ 0.25 \ -0.259] \text{ и}$$

$$\Delta z^T = [-1 \quad -0.134 \quad -0.291 \quad -0.023 \quad -0.023 \quad 0.25 \quad 0.25 \quad -0.134].$$

**Результаты тестирования.** Для апробации точности расчета проведем сравнение с методом на основании уравнений Кирхгофа, а также экспериментальных данных [4] для переката Талицкий (рис.2) река Обь. Здесь мы решаем задачу оптимизации - нахождение экстремума целевой функции при наличии ограничений.

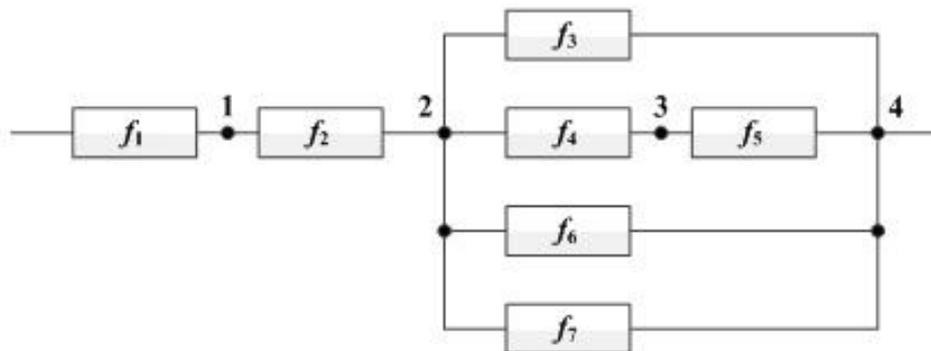


Рис. 2. – Топология переката Талицкий

Здесь  $f_1 \div f_7$  - модули сопротивления соответствующих участков,  $1 \div 4$  - узлы соединения рукавов, количество независимых узловых уравнений -  $N = 4$ , количество неизвестных расходов -  $M = 7$ , расход во входном створе -  $Q_{in} = 3500 \text{ м}^3/\text{с}$  - расход.

Матрица  $\mathbf{A}$ , описывающая граф (рис.2), имеет вид:

$\mathbf{A} :=$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-1	0	0	0	0	0
2	0	1	-1	-1	0	-1	-1
3	0	0	0	1	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	1	1

$\mathbf{AB}$ - расширенная матрица соединений (инцидентности) имеет вид:

$$\mathbf{AB} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & Q_{in} \end{bmatrix}, \text{ где } \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{in} \end{bmatrix}.$$

$\text{ранг}(\mathbf{A}) = 4$  и  $\text{ранг}(\mathbf{AB}) = 4$  равны, система разрешима.

Значение модулей сопротивления рукавов реки  $f_1 \div f_7$  (экспериментальные данные) -  $f := [1.64 \ 1.28 \ 6.22 \ 163 \ 138 \ 12.4 \ 7.5] \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-5} \cdot \text{с}^2$ .

Далее используя (2) для  $M = 7$  и  $q_i := 10$  ( $|q_i| \leq Q_{in}$ ) получим значения расходов в рукавах (рис.3а) и падения уровня воды (рис.3б):

$$q_i^T = [3500 \ 3500 \ 1266 \ 182.1 \ 182.1 \ 897.0 \ 1154] \text{ м}^3/\text{с} \text{ и}$$

$$\Delta z^T = [20.09 \ 15.68 \ 9.98 \ 5.40 \ 4.57 \ 9.98 \ 9.98] \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

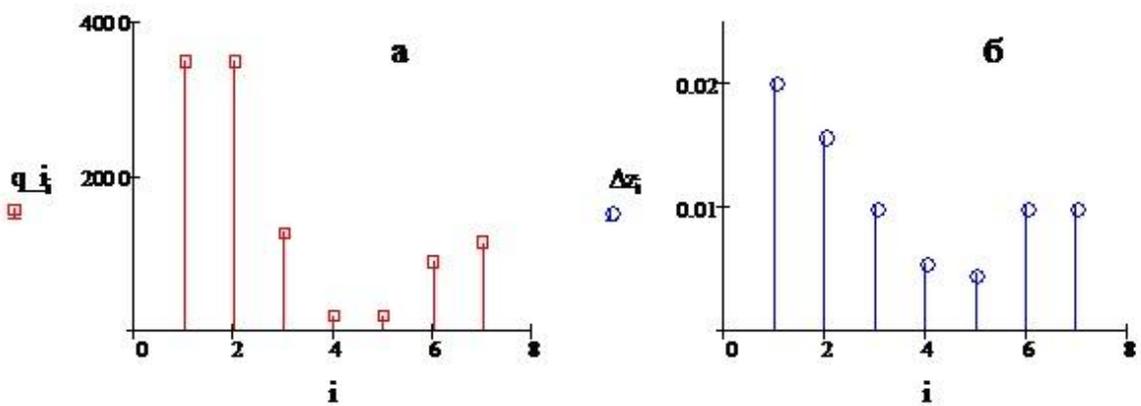


Рис. 3. – Графики расхода и уровня падения воды в рукавах п.Галицкий

Ниже приведены тестовые значения из [4], посчитанных в пакете MicroCap на основе уравнений Кирхгофа [6].

$$q_i^T_{\text{Кирхгоф}} = [3500 \ 3500 \ 1270 \ 180 \ 180 \ 890 \ 1150] \text{ м}^3/\text{с} \text{ и}$$

$$\Delta z^T_{\text{Кирхгоф}} = [20.00 \ 15.67 \ 10.01 \ 5.46 \ 4.54 \ 10.01 \ 10.01] \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Виден хороший уровень совпадения результатов.

Задав  $q_i$  и  $\Delta z$  как функцию от расхода во входном створе, можем построить зависимости при его колебании в течение навигационного периода.

**Выводы.** При проведении работ на внутренних водных путях на разветвлённом участке расход воды в русле, как правило, известен только в нижнем течении [1,2]. Какой-либо общей методики, как показало общение с практиками бассейновых управлений, сегодня не существует [10]. На

практике обычно вводят допущение о независимости модуля сопротивления рукавов от изменения свободной поверхности воды. Предложенная методика достаточно проста и понятна для инженерного состава изыскателей при проведении проектных, например дноуглубительных работ, и не требует сложного программного обеспечения.

### Литература

1. Маккавеев Н.И., Чалов Р.С. Русловые процессы учебник. –М.: МГУ,1986. С. 162-164.
2. Гришанин Н.В., Дегтярев В.В., Селезнев В.М. Водные пути: учебник для вузов. – М.: Транспорт, 1986. С. 20-21
3. Dobrovolska O. Development of procedure to control flow distribution in water supply networks in real time // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies – 2018. pp. 17-24
4. Ботвинков В.М., Голышев Н.В., Седых В.А., Моторин С.В., Ботвинков А.В. Программный модуль для расчёта и анализа локальных параметров русла на примере Обского бассейна // Науч. проблемы трансп. Сибири и Дал. Востока. - 2014. - №3. - С.86-93.
5. Aleshkin S.A., Kornilov M.V. Mathematical modeling of water flowdistribution over the deltaic channels – 2001. – URL: [researchgate.net/publication/293739847\\_Mathematical\\_modeling\\_of\\_water\\_flow\\_distribution\\_over\\_the\\_deltaic\\_channels](https://researchgate.net/publication/293739847_Mathematical_modeling_of_water_flow_distribution_over_the_deltaic_channels).
6. Голышев Н.В., Моторин С.В., Лапай А.Ю., Ботвинков А.В. Анализ диссипативных систем методом нелинейного программирования // Актуальные проблемы электронного приборостроения: АПЭП -2012: тр. XI Междунар. науч.-техн. конф. –Новосибирск, 2012. –Т.5. С. 125-128
7. Ботвинков А.В., Голышев Н.В. Расчёт водного потока распределённого по рукавам в многорукавных участках рек // Инженерный вестник Дона. 2019. № 5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971)

8. Кремень Е.В., Кремень Ю.А., Расолько Г.А. Численные методы. Практикум в MathCad: учебное пособие. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. – 255 с.
9. Карни Ш. Теория цепей. Анализ и синтез: пер. с англ. М: Связь, 1973. 368 с.
10. Зернов С.Я. Внутренние водные пути Северо-Восточного региона: Проектирование строительство, эксплуатация. – Новосибирск: Наука, 2003. 71-73 с.

### References

1. Makkaveev N.I., Chalov R.S. Ruslovyje processy uchebnik [Channel tutorial]. M., MGU, 1986, pp. 162-164
  2. Grishanin N.V., Degtjarev V.V., Seleznev V.M., Vodnye puti: uchebnik dlja vyzov [Waterways: textbook for universities]. M.: Transport, 1986, pp. 87-90.
  3. Dobrovolska O. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies 2018, pp. 17-24.
  4. Botvinkov V.M., Golyshev N.V., Sedyh V.A., Motorin S.V., Botvinkov, A.V Nauchnye problemy transporta Sibiri i Dal'nego Vostoka. 2014. № 3. pp. 86-93
  5. Aleshkin S.A., Kornilov M.V. Mathematical modeling of water flow distribution over the deltaic channels 2001. URL: [researchgate.net/publication/293739847\\_Mathematical\\_modeling\\_of\\_water\\_flow\\_distribution\\_over\\_the\\_deltaic\\_channels](https://researchgate.net/publication/293739847_Mathematical_modeling_of_water_flow_distribution_over_the_deltaic_channels).
  6. Goly`shev N.V., Motorin S.V., Lapai A.Yu., Botvinkov A.V. Aktual'nye problemy jelektronnogo priborostroenija: APJeP 2012: tr. XI Mezhdunar. nauch.-tehn. konf. Novosibirsk, 2012. vol.5. pp. 125-128.
  7. Botvinkov A.V., Goly`shev N.V Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971)
-



8. Kremen' E.V., Kremen' Ju.A, Rasol'ko G.A. Chislennye metody. Praktikum v MathCad: uchebnoe posobie. [Numerical methods. Workshop in MathCad: a textbook]. Minsk: Vyshnejshaja shkola, 2019. 255 p.
9. Karni Sh. Teorija cepej. Analiz i sintez: per. s angl. [Theory of circuits. Analysis and synthesis]. M: Svjaz', 1973. 368 p.
10. Zernov S.Ja Vnutrennie vodnye puti Severo-Vostochnogo regiona: Proektirovanie, stroitel'stvo, jekspluatacija. [Internal waterways of the northeast region]. Novosibirsk: Nauka, 2003, pp. 71-73